

Вариант 0.

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AD$ , а  $M$  делит ребро  $BB_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; -2; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 0; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-5; -1; 0)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-10; 1; -2)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 1; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-5; 2; -3)$ ,  $\mathbf{c}(5; -1; 4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(6; 6; 9)$ ,  $B(5; 2; 8)$ ,  $C(9; 9; 11)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(0; -9; 6)$ ,  $B(2; -17; 5)$ ,  $D(-1; -4; 7)$ ,  $A_1(2; -19; 3)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-7; 9; 0)$ ,  $B(2; 14; -8)$ ,  $C(-12; 6; 5)$ ,  $S(-1; 6; 1)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-3; 3; -3)$  параллельно прямой  $\frac{x-2}{7} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{1}$  и перпендикулярно плоскости  $5x + 3y + z = -2$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 1; 9)$ ,  $B(6; -4; 8)$ ,  $C(11; 8; 10)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + 2y + 2z + 28 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(7; -6; -3)$  на плоскость  $7x + y - 4z + 77 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+3}{1} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z-6}{-3}$  и плоскостью  $\pi : -2x - 3y + 2z = 0$ .

Вариант 1.

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении 2 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-5; 1; 3)$ ,  $\mathbf{b}(4; -1; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-5; 2; 4)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; 0; 0)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + 5\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(3; -1; 2)$ ,  $\mathbf{b}(1; 1; 1)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 0; -2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(6; 1; 7)$ ,  $B(7; 6; 6)$ ,  $C(7; -2; 7)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(-1; 5; 5)$ ,  $B(8; 5; 7)$ ,  $D(0; -3; 3)$ ,  $A_1(2; 6; 6)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(2; 1; -8)$ ,  $B(-1; 2; -7)$ ,  $C(12; 0; -8)$ , и найти расстояние от точки  $S(-1; -8; 7)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-4; 7; -2)$  параллельно плоскости  $2x - y - z + 2 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(4; 8; 0)$ ,  $B(6; 9; 3)$ ,  $C(-1; 6; -7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x - 7y + z - 12 = 0 \\ x - 2y + z - 7 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(1; -1; 0)$  относительно плоскости  $-x + 6y - 3z = -30$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-6}{2} = \frac{y+8}{2} = \frac{z+8}{1}$  и плоскостью  $\pi : -x - y - 3z = 7$ .

**Вариант 2.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AD$ , а  $M$  делит ребро  $D_1 C_1$  в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; 3; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -2; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-3; 0; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(5; 5; -3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 7\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-6; -5; 6)$ ,  $\mathbf{b}(2; 3; -3)$ ,  $\mathbf{c}(0; -7; 9)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(1; 9; 8)$ ,  $B(4; 7; 11)$ ,  $C(0; 10; 4)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $QRS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $P$ .  $P(-7; -10; -10)$ ,  $Q(1; -6; -7)$ ,  $R(-3; -3; -5)$ ,  $S(-6; -4; -6)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-7; -10; 6)$ ,  $B(-4; -14; 7)$ ,  $C(-6; -11; 6)$ , и найти расстояние от точки  $S(-3; -1; -3)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-8; 0; 10)$  параллельно плоскости  $x - 9y + 9 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+5}{-1} = \frac{y-5}{10} = \frac{z+8}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(6; 3; 0)$ ,  $B(8; -4; 5)$ ,  $C(5; 7; -3)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + 10y - z + 21 = 0 \\ x + 9y + 22 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(36; -41; 25)$  на плоскость  $-7x + 10y - 5z + 91 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+1}{1} = \frac{y+6}{-3} = \frac{z+1}{-2}$  и плоскостью  $\pi : -3x + y - 2z - 10 = 0$ .

**Вариант 3.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 D_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении  $2 : 3$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-5; 3; -5)$ ,  $\mathbf{b}(5; -3; 6)$ ,  $\mathbf{c}(1; -1; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-6; 2; -1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(4; 1; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -3; -1)$ ,  $\mathbf{c}(8; 7; 8)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(8; 7; 4)$ ,  $B(4; 10; 6)$ ,  $C(9; 5; 3)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PQS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $R$ .  $P(7; -8; -1)$ ,  $Q(0; -4; 5)$ ,  $R(5; -9; -1)$ ,  $S(3; -3; 4)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(6; 3; 2)$ ,  $B(8; 2; -7)$ ,  $C(5; 4; 9)$ ,  $S(-1; 0; -1)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(1; 3; 6)$  параллельно плоскости  $x - y + 2z = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x-4}{-1} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-2}{-1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 7; 6)$ ,  $B(-2; 1; 5)$ ,  $C(9; 14; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой  
$$\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ -9x - y + z + 9 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(12; 1; 8)$  относительно плоскости  $6x + y + 3z = -18$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+3}{-2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-3}{1}$  и плоскостью  $\pi : -3x - 2y + z = 4$ .

Вариант 4.

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AD$ , а  $M$  делит ребро  $CC_1$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-5; -3; -5)$ ,  $\mathbf{b}(3; 2; 3)$ ,  $\mathbf{c}(1; 2; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(4; -5; -6)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(6; 2; -7)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 2; 7)$ ,  $\mathbf{c}(-10; -2; 13)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(3; 7; 2)$ ,  $B(6; 4; 4)$ ,  $C(4; 3; 3)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(5; -5; 9)$ ,  $A_2(3; -10; 14)$ ,  $A_4(2; -4; 1)$ ,  $B_1(5; -4; 7)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(4; 0; -7)$ ,  $B(3; -1; -8)$ ,  $C(7; 5; -3)$ ,  $S(-3; 6; 0)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(3; -6; 5)$  перпендикулярно плоскостям  $x - y - 5z - 1 = 0$  и  $-x + 2y + 2z = 4$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 8; 4)$ ,  $B(2; 10; 5)$ ,  $C(9; 5; 2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + y + z - 17 = 0 \\ x - 2y + z - 11 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-1; 2; -7)$  относительно плоскости  $-6x - 5y + 5z - 4 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}$  и плоскостью  $\pi : 2x + 2y - z = -12$ .

**Вариант 5.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; 0; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 3; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-3; 5; -4)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-2; -4; 5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_y \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-5; -3; -6)$ ,  $\mathbf{b}(2; 3; 2)$ ,  $\mathbf{c}(10; -1; 6)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(9; 9; 6)$ ,  $B(12; 4; 7)$ ,  $C(8; 13; 6)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(-1; -4; -6)$ ,  $B(-2; -6; -7)$ ,  $D(2; 1; -6)$ ,  $E(-5; -10; -3)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(9; -2; -9)$ ,  $B(10; -10; -9)$ ,  $C(10; -1; -8)$ ,  $S(-7; 7; -7)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(7; -10; 2)$  перпендикулярно плоскостям  $8x + 5y - 2 = 0$  и  $-5x - 3y + z = -6$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 5; 4)$ ,  $B(10; 7; -5)$ ,  $C(6; 6; 0)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 8x + 2y - z + 23 = 0 \\ -x - y + z - 6 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-6; 17; -3)$  относительно плоскости  $x - 5y = -26$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-7}$  и плоскостью  $\pi : x - y - z = 8$ .

**Вариант 6.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 B_1$  в отношении 2 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; -5; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 2; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-5; 2; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(5; -6; -4)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-2; 5; 2)$ ,  $\mathbf{b}(2; 2; -1)$ ,  $\mathbf{c}(3; -5; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(9; 1; 6)$ ,  $B(5; 2; 5)$ ,  $C(2; 2; 6)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A_1(6; 6; 2)$ ,  $A_2(8; 5; 3)$ ,  $A_3(3; 7; 0)$ ,  $A_4(3; 1; 9)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(2; -3; 0)$ ,  $B(7; -8; 4)$ ,  $C(4; -7; 3)$ , и найти расстояние от точки  $S(3; -1; -4)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-4; 9; -9)$  параллельно плоскости  $3x - 2y - 5z = 5$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x}{-4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+6}{6}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(1; 8; 0)$ ,  $B(3; 13; 3)$ ,  $C(2; 11; 2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x + 3y + z - 27 = 0 \\ -x + 2y - 2z + 3 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(31; -17; 18)$  на плоскость  $-8x + 3y - 5z + 95 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$  и плоскостью  $\pi : 3x + y + z = 9$ .

**Вариант 7.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 B_1$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; -3; -2)$ ,  $\mathbf{b}(2; -5; 3)$ ,  $\mathbf{c}(3; -4; 0)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(1; 4; -9)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(3; -5; 2)$ ,  $\mathbf{b}(8; -1; 0)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 1; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(3; 9; 4)$ ,  $B(4; 11; 5)$ ,  $C(0; 8; 4)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PRS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $Q$ .  $P(6; 4; 6)$ ,  $Q(7; 6; 5)$ ,  $R(9; 8; 3)$ ,  $S(8; 1; 7)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-3; 3; 5)$ ,  $B(2; 6; 7)$ ,  $C(0; 5; 6)$ ,  $S(7; -1; 5)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(0; 10; 7)$  перпендикулярно плоскостям  $5x + y - 3z = 7$  и  $-7x - y + 4z + 5 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(1; 0; 6)$ ,  $B(6; 2; 3)$ ,  $C(-7; -3; 11)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + 7y - 3z + 7 = 0 \\ -x - 3y + 2z - 6 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-10; -13; 10)$  относительно плоскости  $6x + 7y - 9z = 8$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+7}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+5}{-4}$  и плоскостью  $\pi : 2x + y + z + 6 = 0$ .



Вариант 8.

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BC$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 B_1$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; -2; 2)$ ,  $\mathbf{b}(1; -4; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-6; -1; 5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; -1; 1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 8\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-6; 5; -6)$ ,  $\mathbf{b}(4; -3; 3)$ ,  $\mathbf{c}(-4; 0; 3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(5; 8; 6)$ ,  $B(0; 10; 5)$ ,  $C(3; 9; 6)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(-6; -2; -2)$ ,  $A_2(-5; 2; 1)$ ,  $A_4(-9; -9; -6)$ ,  $B_1(-6; -6; -7)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(4; -3; 8)$ ,  $B(7; 1; 9)$ ,  $C(3; -2; 8)$ , и найти расстояние от точки  $S(5; 5; -2)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-5; -2; -7)$  перпендикулярно плоскостям  $x - 2y - z = 4$  и  $x + 3y = 2$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 4; 0)$ ,  $B(3; 3; 5)$ ,  $C(4; 3; 3)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x + y + 6 = 0 \\ 6x - 2y + z + 17 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(21; 26; 3)$  относительно плоскости  $-9x - 9y - 2z = -14$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-8}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+6}{3}$  и плоскостью  $\pi : -4x + y - z + 11 = 0$ .

**Вариант 9.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BC$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 B_1$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; -1; -4)$ ,  $\mathbf{b}(-2; -1; -5)$ ,  $\mathbf{c}(3; 2; 5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; -1; -8)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 8\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(4; -6; -3)$ ,  $\mathbf{b}(2; -3; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-4; 5; 4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(8; 7; 3)$ ,  $B(5; 9; 7)$ ,  $C(13; 4; -4)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $ABC$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $D$ .  $A(-8; 1; 9)$ ,  $B(-8; -3; 6)$ ,  $C(-9; 6; 13)$ ,  $D(-2; -3; 6)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-4; -3; 2)$ ,  $B(0; -2; 7)$ ,  $C(-1; -2; 6)$ , и найти расстояние от точки  $S(8; -8; 1)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(8; 6; 2)$  параллельно прямым  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+3}{-9}$  и  $\frac{x+1}{1} = \frac{y+8}{-1} = \frac{z+6}{-7}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 3; 3)$ ,  $B(7; 5; 6)$ ,  $C(6; 6; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z - 14 = 0 \\ -x + y + 2z + 9 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-9; -13; 8)$  относительно плоскости  $5x + 7y - 2z = 43$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-6}{3}$  и плоскостью  $\pi : -x + y - z = -7$ .

**Вариант 10.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 B_1$ , а  $M$  делит ребро  $DD_1$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(6; 3; -5)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -2; 3)$ ,  $\mathbf{c}(-4; -3; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(6; -1; -5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(11; -3; -4)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 1; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-4; -1; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(0; 0; 3)$ ,  $B(-1; -1; -2)$ ,  $C(3; 2; 9)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A_1(0; 7; -6)$ ,  $A_2(2; 6; -9)$ ,  $A_3(4; 4; -14)$ ,  $A_4(-7; 5; -2)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-8; -2; 5)$ ,  $B(-7; -3; 6)$ ,  $C(-11; 2; -4)$ ,  $S(1; -1; 8)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-5; -3; 6)$  параллельно прямой  $\frac{x-6}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$  и перпендикулярно плоскости  $-4x - y + 6 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(6; 3; 6)$ ,  $B(10; -2; -3)$ ,  $C(7; 2; 4)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x - y - 3z - 23 = 0 \\ -2x + y - z + 18 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(25; 10; 27)$  на плоскость  $7x + 4y + 10z = -10$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-4}{-8} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-4}{1}$  и плоскостью  $\pi : -x - y - z = -2$ .

**Вариант 11.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $AD$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; 2; -3)$ ,  $\mathbf{b}(-4; 3; -5)$ ,  $\mathbf{c}(2; 3; -5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-9; -4; 7)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 7\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(2; 5; -3)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -2; -1)$ ,  $\mathbf{c}(1; -1; 1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 1; 3)$ ,  $B(10; 2; 1)$ ,  $C(9; 2; 2)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $QRS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $P$ .  $P(-12; 5; 16)$ ,  $Q(-9; 0; 9)$ ,  $R(-11; 3; 13)$ ,  $S(-6; -7; 7)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(1; 6; -8)$ ,  $B(2; 2; -9)$ ,  $C(2; 7; -8)$ ,  $S(6; -2; 5)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(7; 7; -9)$  параллельно плоскости  $3x - 6y + z = -8$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{0}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(0; 3; 4)$ ,  $B(3; 2; 11)$ ,  $C(4; 2; 13)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой  
$$\begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 6x + y + 2z + 24 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(33; -23; 36)$  на плоскость  $9x - 4y + 8z = 33$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+4}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-8}{1}$  и плоскостью  $\pi : -2x - 2y - z + 2 = 0$ .

**Вариант 12.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $CC_1$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 D_1$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; -3; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 3; 1)$ ,  $\mathbf{c}(3; -4; -2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(6; -7; -5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(-4; 1; 7)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 1; 6)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -7; 0)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(8; 3; 5)$ ,  $B(5; 6; 6)$ ,  $C(10; -1; 4)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PRS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $Q$ .  $P(-9; 9; 3)$ ,  $Q(-5; 5; -2)$ ,  $R(-11; 9; 2)$ ,  $S(-14; 12; 8)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-9; -2; 10)$ ,  $B(-8; -5; 10)$ ,  $C(-8; -4; 11)$ , и найти расстояние от точки  $S(6; 8; 0)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-4; 1; 7)$  параллельно прямым  $\frac{x+5}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{1}$  и  $\frac{x+5}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 8; 6)$ ,  $B(10; -1; 11)$ ,  $C(7; 13; 3)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -4x - y - z - 29 = 0 \\ -5x + y - z - 28 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(22; -25; 19)$  на плоскость  $-9x + 8y - 7z - 51 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$  и плоскостью  $\pi : 4x + 6y + 3z + 9 = 0$ .

**Вариант 13.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $CC_1$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 B_1$  в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(2; 0; -3)$ ,  $\mathbf{b}(2; -2; -3)$ ,  $\mathbf{c}(3; 1; -4)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-7; 3; 10)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(11; 0; -10)$ ,  $\mathbf{b}(5; 1; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-5; -2; 3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 9; 4)$ ,  $B(3; 13; 4)$ ,  $C(4; 10; 5)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_2$ .  $A_1(-5; -9; 7)$ ,  $A_2(-8; -2; 6)$ ,  $A_3(0; -10; 9)$ ,  $A_4(-2; -4; 8)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(8; 3; 7)$ ,  $B(9; 2; 7)$ ,  $C(6; 0; 8)$ , и найти расстояние от точки  $S(-3; -7; -3)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(3; -2; 1)$  параллельно прямым  $\frac{x+5}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+4}{5}$  и  $\frac{x+8}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(9; 5; 4)$ ,  $B(8; 4; 4)$ ,  $C(11; 6; 3)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 4z + 19 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-23; -7; -4)$  на плоскость  $-9x - 5y + 2z = 14$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1}$  и плоскостью  $\pi : 3x + 5y + 5z + 11 = 0$ .

**Вариант 14.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AB$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; -3; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-5; -2; -4)$ ,  $\mathbf{c}(-3; 0; -2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(2; 2; 2)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 6\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(3; 4; -2)$ ,  $\mathbf{b}(2; 5; -2)$ ,  $\mathbf{c}(-9; -10; 4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(6; 1; 0)$ ,  $B(9; 3; 6)$ ,  $C(7; 2; 1)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $ABC$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $D$ .  $A(-2; 3; 1)$ ,  $B(-1; 0; -4)$ ,  $C(-1; 3; -1)$ ,  $D(-4; -1; 2)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(4; -4; -7)$ ,  $B(12; -3; -7)$ ,  $C(-3; -6; -6)$ , и найти расстояние от точки  $S(5; 2; 6)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-5; 0; 1)$  перпендикулярно плоскостям  $x + 7y = 7$  и  $-x - 6y + z = 2$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 4; 3)$ ,  $B(5; 7; 4)$ ,  $C(2; 3; 2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -7x + y - z - 15 = 0 \\ -4x + y - 4 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(1; -29; -14)$  на плоскость  $3x + 8y + 8z - 70 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+1}{1} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+6}{1}$  и плоскостью  $\pi : 5x - 3y + 2z = -9$ .

**Вариант 15.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $M$  делит ребро  $D_1 C_1$  в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; -2; 0)$ ,  $\mathbf{b}(-5; 4; -5)$ ,  $\mathbf{c}(1; -1; 4)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-6; 5; -6)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 8\mathbf{m} - 7\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(7; 5; -5)$ ,  $\mathbf{b}(6; 7; -4)$ ,  $\mathbf{c}(-14; -19; 11)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 1; 5)$ ,  $B(1; 10; 6)$ ,  $C(1; 3; 5)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(-9; 6; 3)$ ,  $B(-5; 7; 0)$ ,  $D(-14; 9; 5)$ ,  $A_1(-11; 6; 4)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-9; 6; -6)$ ,  $B(-8; 5; -7)$ ,  $C(-5; 10; -3)$ , и найти расстояние от точки  $S(0; -4; -8)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-1; 3; 10)$  параллельно прямым  $\frac{x+1}{-10} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-3}{2}$  и  $\frac{x+1}{-9} = \frac{y+7}{-1} = \frac{z+2}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(1; 3; 1)$ ,  $B(0; 2; -2)$ ,  $C(-2; -1; -9)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -4x + y + z - 21 = 0 \\ -3x - y - 30 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(0; 1; -11)$  на плоскость  $-5x - 2y - 9z + 123 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+8}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+4}{2}$  и плоскостью  $\pi : 2x - 2y - 2z + 13 = 0$ .



**Вариант 16.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 B_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; 1; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-4; -5; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -1; -1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-6; -5; -5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(1; -10; 0)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -7; -2)$ ,  $\mathbf{c}(2; 5; 1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(8; 6; 7)$ ,  $B(17; 8; 8)$ ,  $C(1; 5; 7)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A_1(9; -3; 6)$ ,  $A_2(8; -5; 5)$ ,  $A_3(8; 0; 11)$ ,  $A_4(6; -8; 3)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(3; -4; 1)$ ,  $B(0; -3; 1)$ ,  $C(7; -3; 2)$ ,  $S(-8; -5; -2)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-6; 8; 5)$  параллельно плоскости  $x + y - z = -7$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+8}{-2} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z-5}{3}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 1; 2)$ ,  $B(7; -2; 9)$ ,  $C(6; 0; 5)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 5x + y - 2z + 17 = 0 \\ -7x - y + 3z - 22 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-44; -43; -35)$  на плоскость  $-10x - 9y - 10z - 53 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+8}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-6}{-1}$  и плоскостью  $\pi : 3x + y + 4z - 5 = 0$ .

**Вариант 17.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $B_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $AA_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; 0; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -4; 3)$ ,  $\mathbf{c}(-3; -5; 5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(4; 5; -2)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{2}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 2; -1)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 1; -2)$ ,  $\mathbf{c}(2; -4; 3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 1; 1)$ ,  $B(6; 8; 2)$ ,  $C(6; 2; 1)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(0; 3; -6)$ ,  $A_2(5; 9; -3)$ ,  $A_4(7; 11; -2)$ ,  $B_1(-2; 0; -6)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(3; -7; 0)$ ,  $B(0; -12; 1)$ ,  $C(5; -4; 1)$ , и найти расстояние от точки  $S(-6; 0; -1)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(5; 8; 7)$  параллельно плоскости  $x - 5y + z + 1 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+4}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z+4}{2}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(6; 4; 9)$ ,  $B(4; 1; 14)$ ,  $C(3; -1; 17)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x - 3y + 21 = 0 \\ -x - 4y + z + 30 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-8; 5; -9)$  на плоскость  $-x + 7y - 8z = -113$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{-1}$  и плоскостью  $\pi : x + 4y + 3z = -2$ .

**Вариант 18.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $CC_1$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 D_1$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(0; 5; 4)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 4; 1)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 3; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(7; 4; 8)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-6; 9; -2)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 4; -1)$ ,  $\mathbf{c}(1; -5; 1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(9; 8; 6)$ ,  $B(13; 7; 9)$ ,  $C(12; 7; 8)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_3$ .  $A_1(8; 0; 2)$ ,  $A_2(15; 1; 5)$ ,  $A_3(3; 2; 7)$ ,  $A_4(-2; -2; -3)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-4; 4; 10)$ ,  $B(-11; -1; 12)$ ,  $C(-7; 1; 11)$ , и найти расстояние от точки  $S(0; 0; 7)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-2; 6; -5)$  параллельно прямой  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{-4}$  и перпендикулярно плоскости  $2x - y + z + 2 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 6; 8)$ ,  $B(0; 14; 6)$ ,  $C(3; 9; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} 2x - y - 8z - 4 = 0 \\ -x + y + z - 6 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(38; 17; 8)$  на плоскость  $-10x - 5y - 3z = 47$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-8}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+8}{1}$  и плоскостью  $\pi : -x + 5y - 5z = 5$ .

**Вариант 19.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $B_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $DD_1$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; 0; 1)$ ,  $\mathbf{b}(-5; 1; -3)$ ,  $\mathbf{c}(4; -3; 6)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(8; 8; -10)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(2; -5; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 6; -3)$ ,  $\mathbf{c}(7; -14; 6)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(9; 4; 6)$ ,  $B(14; 1; 8)$ ,  $C(12; 2; 7)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $ABC$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $D$ .  $A(-3; 7; 2)$ ,  $B(-11; 6; 5)$ ,  $C(-12; 10; 10)$ ,  $D(0; 7; 0)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(8; 7; 2)$ ,  $B(9; 9; -5)$ ,  $C(7; 6; 4)$ ,  $S(-1; 8; -6)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-7; -10; -9)$  параллельно плоскости  $5x + 2y - 3z - 2 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+8}{-6} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+6}{5}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(6; 9; 1)$ ,  $B(10; 14; 4)$ ,  $C(5; 8; 0)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -5x + y + z + 19 = 0 \\ 3x - y - 12 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-2; 0; 7)$  на плоскость  $3x + y - 2z - 22 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+4}{-1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-7}{1}$  и плоскостью  $\pi : 3x + y + 2z + 5 = 0$ .

**Вариант 20.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BC$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 B_1$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; -4; -5)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 5; 6)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 5; 4)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(2; 1; -1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(6; 2; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-5; 6; -6)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 1; -2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(5; 1; 2)$ ,  $B(12; 2; 3)$ ,  $C(2; 0; 2)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $QRS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $P$ .  $P(-5; 2; 16)$ ,  $Q(3; 3; 8)$ ,  $R(5; 3; 7)$ ,  $S(8; 5; 2)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(2; -5; 1)$ ,  $B(-8; -6; 2)$ ,  $C(-7; -6; 1)$ ,  $S(1; -6; 3)$ :
  - а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,
  - б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(1; 0; -3)$  параллельно плоскости  $2x + 2y + 5z = 9$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+8}{-2}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 1; 7)$ ,  $B(13; -1; 0)$ ,  $C(6; 2; 10)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -4x + y + 2z - 3 = 0 \\ -x + y + 3z - 25 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-20; -15; -14)$  относительно плоскости  $-7x - 7y - 6z = -6$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+6}{-1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+4}{-3}$  и плоскостью  $\pi : -2x + 2y + 3z - 11 = 0$ .

**Вариант 21.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AD$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 B_1$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(0; 1; -2)$ ,  $\mathbf{b}(1; 1; -4)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 2; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-3; -3; 9)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(1; 3; 3)$ ,  $\mathbf{b}(1; 2; 1)$ ,  $\mathbf{c}(2; -3; -3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(1; 2; 6)$ ,  $B(3; 7; 9)$ ,  $C(2; 5; 8)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $ACD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B$ .  $A(-9; -5; -6)$ ,  $B(-4; -6; -9)$ ,  $C(-16; -4; -2)$ ,  $D(-19; -7; -11)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(9; 2; -7)$ ,  $B(12; 10; -5)$ ,  $C(7; -1; -8)$ ,  $S(0; -1; -6)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-8; -3; 1)$  параллельно прямой  $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{4}$  и перпендикулярно плоскости  $-2x - y - z = 3$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(4; 4; 9)$ ,  $B(5; 1; 8)$ ,  $C(7; -4; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x + y - 2z - 17 = 0 \\ x + 2y + 3z + 29 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(0; -20; 8)$  на плоскость  $5x - 6y - z + 12 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+8}{1}$  и плоскостью  $\pi : x + 2y + 2z + 9 = 0$ .

**Вариант 22.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DC$ , а  $M$  делит ребро  $BB_1$  в отношении  $2 : 3$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; -2; 1)$ ,  $\mathbf{b}(2; 3; -4)$ ,  $\mathbf{c}(-3; -2; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(3; -3; -3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-1; -2; 2)$ ,  $\mathbf{b}(4; 5; -6)$ ,  $\mathbf{c}(3; 6; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 8; 9)$ ,  $B(-1; 3; 7)$ ,  $C(1; 5; 8)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $QRS$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $P$ .  $P(1; 5; -4)$ ,  $Q(8; 0; -5)$ ,  $R(7; -4; -4)$ ,  $S(17; 4; -8)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(1; 5; 3)$ ,  $B(2; 6; 8)$ ,  $C(2; 7; 5)$ ,  $S(-8; 7; 1)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-2; -1; -5)$  перпендикулярно плоскостям  $2x - y - z + 6 = 0$  и  $-x + y + 5z + 6 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 7; 4)$ ,  $B(0; 5; 0)$ ,  $C(2; 6; 3)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 4x - y + z - 27 = 0 \\ 3x - 2y + z - 11 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(2; -12; -14)$  относительно плоскости  $-x + 7y + 8z = -27$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+8}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-6}{-2}$  и плоскостью  $\pi : -3x - y - 3z = 0$ .

**Вариант 23.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 B_1$ , а  $M$  делит ребро  $BC$  в отношении  $3 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-2; 3; 0)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 3; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-1; 2; 1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-3; 8; 5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 7\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2\sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(1; 4; -2)$ ,  $\mathbf{b}(1; -1; 2)$ ,  $\mathbf{c}(0; 4; -9)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(5; 9; 4)$ ,  $B(7; 11; 5)$ ,  $C(0; 6; 3)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(-7; -2; 4)$ ,  $B(-15; -6; 3)$ ,  $D(-4; -1; 6)$ ,  $E(-10; -4; 4)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-5; -1; -7)$ ,  $B(-4; -10; -7)$ ,  $C(-4; -6; -6)$ , и найти расстояние от точки  $S(4; -6; -4)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-6; 4; 10)$  параллельно прямой  $\frac{x+6}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+5}{0}$  и перпендикулярно плоскости  $2x + 7y + z = 6$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(7; 6; 6)$ ,  $B(5; 7; 9)$ ,  $C(0; 9; 16)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -x + 3y + 2z + 1 = 0 \\ -3x + y + z + 13 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(14; 39; -28)$  на плоскость  $2x + 10y - 9z + 70 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{5} = \frac{z+1}{-2}$  и плоскостью  $\pi : 2x - y - z + 4 = 0$ .



**Вариант 24.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DC$ , а  $M$  делит ребро  $BB_1$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; 0; -3)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -1; 5)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 3; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(2; -2; -4)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - 7\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_y \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = 3\mathbf{a} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 6; -6)$ ,  $\mathbf{b}(1; 4; -5)$ ,  $\mathbf{c}(9; -20; 20)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 0; 7)$ ,  $B(10; 2; 10)$ ,  $C(6; 1; 9)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_3$ .  $A_1(6; 0; -1)$ ,  $A_2(7; -3; 8)$ ,  $A_3(8; -1; 0)$ ,  $A_4(11; -2; 1)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(5; -2; -6)$ ,  $B(2; 0; -7)$ ,  $C(7; -3; -5)$ , и найти расстояние от точки  $S(-5; 8; 4)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(5; -5; -4)$  перпендикулярно плоскостям  $x + y + z = -2$  и  $7x + y + 2z + 1 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(2; 4; 1)$ ,  $B(4; 1; -7)$ ,  $C(1; 6; 6)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x + y + 17 = 0 \\ -6x - 2y + z + 18 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-7; -5; 8)$  относительно плоскости  $7x + 2y - 5z = 18$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+8}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-7}{3}$  и плоскостью  $\pi : x - 3y + 2z + 12 = 0$ .

**Вариант 25.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AB$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении 2 : 3.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; 3; -2)$ ,  $\mathbf{b}(1; -5; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 0; -1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(4; -2; 5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 3\sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-7; 2; 2)$ ,  $\mathbf{b}(2; -1; 1)$ ,  $\mathbf{c}(2; -2; 1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(9; 4; 2)$ ,  $B(12; -1; 1)$ ,  $C(7; 6; 3)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(-7; 1; 1)$ ,  $B(-6; 1; 8)$ ,  $D(-6; 0; -6)$ ,  $A_1(-3; -2; -7)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-10; -8; -8)$ ,  $B(-8; -7; -8)$ ,  $C(-7; -9; -7)$ ,  $S(-2; 3; -7)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(9; -6; -9)$  параллельно прямым  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{0}$  и  $\frac{x-6}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(1; 0; 8)$ ,  $B(5; -5; 7)$ ,  $C(-2; 4; 9)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой  
$$\begin{cases} -x + y + z + 5 = 0 \\ 10x - y + 23 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-14; 37; 20)$  на плоскость  $-7x + 9y + 8z - 9 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+5}{-1}$  и плоскостью  $\pi : 3x - y + z = 4$ .

**Вариант 26.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AB$ , а  $M$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(1; -1; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-4; 4; -5)$ ,  $\mathbf{c}(4; -5; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-5; 6; -5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(5; 2; -3)$ ,  $\mathbf{b}(-7; -3; 4)$ ,  $\mathbf{c}(-4; -1; 4)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 4; 5)$ ,  $B(5; 0; 4)$ ,  $C(8; 7; 5)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(-9; -1; -9)$ ,  $B(-14; -3; -6)$ ,  $D(-2; -3; -14)$ ,  $A_1(-10; 2; -8)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(-7; 2; 1)$ ,  $B(-6; 1; 10)$ ,  $C(-8; 4; -7)$ , и найти расстояние от точки  $S(3; -1; 4)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-6; 4; 3)$  параллельно прямой  $\frac{x+8}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-6}{-3}$  и перпендикулярно плоскости  $-x + 2y + z - 8 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 4; 7)$ ,  $B(7; 3; 6)$ ,  $C(8; 3; 5)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -x + y - 1 = 0 \\ -10x + y + z - 18 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(5; 12; 5)$  относительно плоскости  $3x + 8y + z - 5 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-8}{1}$  и плоскостью  $\pi : x + 5y - 3z = -5$ .

**Вариант 27.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 D_1$  в отношении 3 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; 5; 5)$ ,  $\mathbf{b}(1; -2; -3)$ ,  $\mathbf{c}(-2; 5; 6)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(2; 8; 4)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-5; -6; -3)$ ,  $\mathbf{b}(4; 3; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-8; 3; -1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(4; 5; 7)$ ,  $B(9; 12; 10)$ ,  $C(7; 10; 9)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $ABD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $C$ .  $A(8; -8; -8)$ ,  $B(10; -10; -9)$ ,  $C(4; -13; 2)$ ,  $D(5; -5; -7)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(1; 1; 9)$ ,  $B(3; -6; 12)$ ,  $C(2; -1; 11)$ , и найти расстояние от точки  $S(6; -8; 0)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-1; 4; 10)$  параллельно прямой  $\frac{x+2}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{0}$  и перпендикулярно плоскости  $-6x - y + z = 2$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(7; 1; 7)$ ,  $B(9; -2; 15)$ ,  $C(8; 0; 10)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} 4x - y - 4z + 10 = 0 \\ -3x + y + z - 12 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-14; 11; 26)$  на плоскость  $-3x + 5y + 4z = 1$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+8}{2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{-5}$  и плоскостью  $\pi : -x - y + z - 1 = 0$ .

**Вариант 28.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AB$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; 1; 5)$ ,  $\mathbf{b}(5; 2; 2)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -1; -1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-7; -4; -8)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 6\mathbf{m} + 6\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(3; -2; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 1; -2)$ ,  $\mathbf{c}(3; 1; 5)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(6; 7; 6)$ ,  $B(5; 16; 5)$ ,  $C(7; 0; 6)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $P, Q, R, S$ , площадь грани  $PQR$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $S$ .  $P(-9; -4; -5)$ ,  $Q(-14; -5; -9)$ ,  $R(-15; -2; -14)$ ,  $S(-6; -3; -2)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(8; 2; 0)$ ,  $B(5; 1; -1)$ ,  $C(6; 3; 0)$ ,  $S(-4; 6; 8)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(4; 2; -7)$  параллельно плоскости  $x + 3y + 2z - 6 = 0$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z+8}{-3}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 9; 1)$ ,  $B(11; 7; -6)$ ,  $C(10; 8; -3)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 4x - y + z - 17 = 0 \\ 3x - y - 11 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(2; -12; 14)$  относительно плоскости  $-2x + 5y - 7z = 33$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-4}{2}$  и плоскостью  $\pi : 4x + 3y + z = -9$ .

**Вариант 29.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(4; 3; -3)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -2; 5)$ ,  $\mathbf{c}(4; 3; 1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-6; -5; 3)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} + 7\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(1; -5; 4)$ ,  $\mathbf{b}(1; 2; 1)$ ,  $\mathbf{c}(1; -4; 5)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 4; 2)$ ,  $B(6; -1; 1)$ ,  $C(3; 3; 0)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(-3; 4; -6)$ ,  $B(-2; 7; -5)$ ,  $D(-9; -1; -2)$ ,  $A_1(-1; 6; -7)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(10; 7; -5)$ ,  $B(7; 9; -6)$ ,  $C(8; 8; -5)$ ,  $S(6; 6; 8)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-8; -3; -3)$  параллельно плоскости  $x - 8y = 7$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{1}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 7; 4)$ ,  $B(6; 6; 7)$ ,  $C(11; 8; 0)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x - 5y - z + 17 = 0 \\ x - 6y + 9 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-25; 1; 2)$  относительно плоскости  $-9x + z - 22 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+4}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$  и плоскостью  $\pi : 3x - 3y - 2z = -12$ .

**Вариант 30.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AB$ , а  $M$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $1 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(3; 5; 0)$ ,  $\mathbf{b}(1; 1; 2)$ ,  $\mathbf{c}(4; 6; -1)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(2; 2; 1)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 7\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-1; -1; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 6; -2)$ ,  $\mathbf{c}(-1; -14; 2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(1; 6; 4)$ ,  $B(0; 4; 1)$ ,  $C(-1; 7; 5)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -4\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $ABC$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $D$ .  $A(-5; 0; 0)$ ,  $B(-6; 7; -2)$ ,  $C(-5; 4; -1)$ ,  $D(-12; 3; -1)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-6; -9; -9)$ ,  $B(-3; -8; -9)$ ,  $C(-10; -10; -8)$ ,  $S(1; -7; -2)$ :  
 а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
 б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-8; 1; -2)$  параллельно прямым  $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+4}{-2}$  и  $\frac{x+7}{-1} = \frac{y+7}{-7} = \frac{z-2}{-3}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(8; 8; 1)$ ,  $B(11; 6; -3)$ ,  $C(13; 5; -6)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -x - 5y - 3z + 25 = 0 \\ x + 2y + z - 11 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(23; 19; -15)$  на плоскость  $-5x - 9y + 6z - 50 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+6}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-1}{-1}$  и плоскостью  $\pi : x - y - 2z = 12$ .

**Вариант 31.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $D_1 C_1$ , а  $M$  делит ребро  $BB_1$  в отношении 2 : 3.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-2; -3; -3)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -1; -2)$ ,  $\mathbf{c}(-3; -2; -3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(0; 2; 2)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(5; 1; 6)$ ,  $\mathbf{b}(2; 1; 1)$ ,  $\mathbf{c}(-7; -4; 3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 9; 8)$ ,  $B(10; 7; 9)$ ,  $C(6; 10; 5)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 4$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(-3; -1; -2)$ ,  $B(-5; -2; -5)$ ,  $D(-8; -5; -6)$ ,  $A_1(-1; 3; -5)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(6; 7; -2)$ ,  $B(2; 9; -1)$ ,  $C(11; 6; -2)$ , и найти расстояние от точки  $S(-1; 0; 7)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(3; 2; -5)$  параллельно плоскости  $x + 2y + 4z = -7$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x+3}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(3; 1; 3)$ ,  $B(2; 2; 2)$ ,  $C(-1; 4; 1)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -2x - 2y - z - 12 = 0 \\ 3x - y + z - 3 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-9; 1; 6)$  на плоскость  $5x - y + z = 41$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{1}$  и плоскостью  $\pi : -x - 6y + 2z + 12 = 0$ .



**Вариант 32.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $AB$  в отношении  $3 : 2$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-5; -1; 0)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -2; -1)$ ,  $\mathbf{c}(4; 4; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(2; 9; 9)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 2\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(0; 8; 15)$ ,  $\mathbf{b}(3; -5; -7)$ ,  $\mathbf{c}(3; -4; -6)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 2; 1)$ ,  $B(14; 3; 1)$ ,  $C(1; 1; 2)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(-3; 4; 8)$ ,  $A_2(-2; 1; 8)$ ,  $A_4(-3; 7; 13)$ ,  $B_1(-5; 11; 9)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(3; -1; 7)$ ,  $B(4; 0; 7)$ ,  $C(1; 6; 8)$ , и найти расстояние от точки  $S(2; -5; 4)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(3; 7; -10)$  параллельно прямой  $\frac{x+2}{-4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$  и перпендикулярно плоскости  $-x + y + 2z = 2$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(2; 7; 3)$ ,  $B(1; 4; 8)$ ,  $C(3; 9; 0)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} -x + 4y + z + 2 = 0 \\ -2x - y + z + 22 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-19; -16; -46)$  на плоскость  $-4x - 6y - 9z - 54 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-2}{-2}$  и плоскостью  $\pi : x - 2y - z = 9$ .

**Вариант 33.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $A_1 B_1$ , а  $M$  делит ребро  $BC$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(4; 1; -5)$ ,  $\mathbf{b}(-3; -2; 6)$ ,  $\mathbf{c}(-3; 2; 0)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(7; 2; -8)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 7\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(1; 10; -6)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 5; -2)$ ,  $\mathbf{c}(1; -2; 1)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(3; 1; 8)$ ,  $B(6; -9; 9)$ ,  $C(5; -8; 9)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(-1; 0; -6)$ ,  $B(-3; -1; -9)$ ,  $D(-6; 3; -11)$ ,  $E(2; -2; -3)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(9; -1; -5)$ ,  $B(11; -2; -5)$ ,  $C(8; 0; -6)$ ,  $S(3; 1; -1)$ :  
 а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
 б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(4; 4; -10)$  параллельно прямой  $\frac{x+6}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}$  и перпендикулярно плоскости  $-2x + y + z - 6 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(4; 5; 7)$ ,  $B(5; 7; 10)$ ,  $C(7; 12; 17)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} 2x - y - 3z - 3 = 0 \\ -x + 2y + 2z - 1 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(2; -7; 0)$  относительно плоскости  $x - 9y + 2z = 22$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+5}{-1} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z}{-3}$  и плоскостью  $\pi : x + y + z + 6 = 0$ .

**Вариант 34.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 D_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(0; -5; 3)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 1; 2)$ ,  $\mathbf{c}(3; 2; -5)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(3; 7; -8)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 6\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}(1; 1; 2)$ ,  $\mathbf{b}(-7; 5; 4)$ ,  $\mathbf{c}(3; -2; -3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(1; 4; 5)$ ,  $B(3; 3; 9)$ ,  $C(-2; 6; 4)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{3\pi}{4}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A, B, C, D$ , площадь грани  $ACD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B$ .  $A(8; -4; 1)$ ,  $B(14; 0; 0)$ ,  $C(15; 2; -1)$ ,  $D(6; -11; 3)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(6; -4; -1)$ ,  $B(7; 1; -1)$ ,  $C(7; -5; 0)$ , и найти расстояние от точки  $S(-5; 3; -5)$  до этой плоскости.
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(2; 5; 2)$  перпендикулярно плоскостям  $8x - y - z = -6$  и  $-5x + y - 7 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(5; 7; 1)$ ,  $B(6; 9; -4)$ ,  $C(6; 10; -6)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 3x - 4y - 10z + 7 = 0 \\ x - y - z + 4 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-19; 14; -22)$  на плоскость  $-7x + 8y - 8z - 67 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x+5}{-1} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z-1}{-2}$  и плоскостью  $\pi : -2x + y + 3z - 13 = 0$ .

**Вариант 35.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BB_1$ , а  $M$  делит ребро  $DC$  в отношении  $2 : 3$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-3; -3; 5)$ ,  $\mathbf{b}(-2; -3; 6)$ ,  $\mathbf{c}(1; -1; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(3; 2; -4)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -5\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(-1; -2; -3)$ ,  $\mathbf{b}(-1; -3; -5)$ ,  $\mathbf{c}(0; 7; 2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(6; 4; 7)$ ,  $B(7; 2; 6)$ ,  $C(5; 13; 9)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} - 3\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 3$ ,  $|\mathbf{n}| = 3$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_4$ .  $A_1(4; -7; 9)$ ,  $A_2(7; -4; 7)$ ,  $A_3(-3; 3; 14)$ ,  $A_4(6; -6; 8)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(9; 1; -10)$ ,  $B(10; 2; -9)$ ,  $C(7; 9; -11)$ ,  $S(-3; -5; 6)$ :  
 а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
 б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(9; -2; 7)$  параллельно прямой  $\frac{x+7}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1}$  и перпендикулярно плоскости  $-3x - 4y + 2z = 7$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(0; 2; 9)$ ,  $B(-1; 0; 12)$ ,  $C(1; 3; 7)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} -8x + 2y - z + 17 = 0 \\ 5x - y + z - 6 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(36; -3; 15)$  на плоскость  $-9x - y - 3z = -93$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-4}{2} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z+2}{-2}$  и плоскостью  $\pi : 3x - 2y + 3z + 2 = 0$ .

**Вариант 36.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $BC$ , а  $M$  делит ребро  $D_1 C_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-1; 5; -2)$ ,  $\mathbf{b}(2; -1; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-2; -2; 3)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-10; 8; 5)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = \mathbf{m} + 3\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -2\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-5; -3; 7)$ ,  $\mathbf{b}(16; 2; -17)$ ,  $\mathbf{c}(-4; -1; 5)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(7; 3; 2)$ ,  $B(4; 2; 1)$ ,  $C(11; 5; 3)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCDEFGH$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $E$ .  $A(0; -9; -7)$ ,  $B(3; -7; -12)$ ,  $D(2; -8; -10)$ ,  $E(-1; -8; -1)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(6; -7; 9)$ ,  $B(12; -3; 10)$ ,  $C(5; -8; 9)$ ,  $S(6; 8; 0)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(-5; -1; 4)$  параллельно прямой  $\frac{x+4}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$  и перпендикулярно плоскости  $-2x - 5y + 3z - 4 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(4; 5; 3)$ ,  $B(6; 4; 3)$ ,  $C(-5; 10; 2)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 4x + 7y + z - 4 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(-32; 27; 31)$  на плоскость  $10x - 9y - 10z - 251 = 0$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+7}{1}$  и плоскостью  $\pi : -x - 4y + z - 2 = 0$ .

**Вариант 37.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DC$ , а  $M$  делит ребро  $A_1 D_1$  в отношении  $2 : 1$ .
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-2; 4; 5)$ ,  $\mathbf{b}(-3; 4; 5)$ ,  $\mathbf{c}(1; 1; 2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-9; -5; -10)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -6\mathbf{m} + \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(-1; 2; 1)$ ,  $\mathbf{b}(11; -4; -7)$ ,  $\mathbf{c}(-3; 2; 2)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 4; 2)$ ,  $B(4; 5; 1)$ ,  $C(-1; 5; 4)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = -4\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = -3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 5$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 B_4$ , площадь грани  $A_1 A_2 A_3 A_4$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $B_1$ .  $A_1(-7; 6; 0)$ ,  $A_2(0; 13; -2)$ ,  $A_4(-10; 3; 1)$ ,  $B_1(-14; 5; 2)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(-3; 10; -9)$ ,  $B(-8; 11; -8)$ ,  $C(1; 9; -9)$ ,  $S(0; -7; 0)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(4; 1; 4)$  перпендикулярно плоскостям  $-2x + 2y + z - 8 = 0$  и  $-x - y + 2 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(0; 5; 5)$ ,  $B(-3; 0; 7)$ ,  $C(2; 8; 4)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} 2x + 9y + z + 17 = 0 \\ 3x + 10y + 2z + 16 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(5; -38; 20)$  на плоскость  $-2x + 9y - 7z = 44$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-5}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$  и плоскостью  $\pi : x - 5y + 2z + 1 = 0$ .

**Вариант 38.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $DD_1$ , а  $M$  делит ребро  $B_1 C_1$  в отношении 1 : 2.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(-4; -3; -5)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 3; -1)$ ,  $\mathbf{c}(-1; -2; -2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(1; 4; 2)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = 5\mathbf{m} - 4\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = \sqrt{2}$ ,  $|\mathbf{n}| = 2$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{4}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ , где  $\mathbf{a}(4; 2; -7)$ ,  $\mathbf{b}(-1; 5; 4)$ ,  $\mathbf{c}(1; -2; -6)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(5; 9; 7)$ ,  $B(4; 10; 7)$ ,  $C(8; 7; 6)$ .
6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\mathbf{a} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 4$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{3}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(0; 0; 9)$ ,  $B(5; -4; 4)$ ,  $D(-1; 2; 10)$ ,  $A_1(3; -3; 7)$ .
8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки  $A(10; -9; 10)$ ,  $B(13; -2; 11)$ ,  $C(12; -4; 11)$ , и найти расстояние от точки  $S(-8; 7; 4)$  до этой плоскости.
9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M(-2; -7; -5)$  параллельно плоскости  $2x - y - 4z = -8$  и перпендикулярно прямой  $\frac{x-5}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-3}$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(6; 5; 5)$ ,  $B(9; 0; 4)$ ,  $C(11; -3; 3)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой 
$$\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 3x - 3y + z - 22 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти проекцию точки  $M(3; 2; 22)$  на плоскость  $-4x + y - 6z = -36$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x}{-1} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z-5}{1}$  и плоскостью  $\pi : 5x + 2y + 4z = 15$ .

**Вариант 39.**

1. В параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ . Выразить через  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  вектор  $\mathbf{q} = \overline{KM}$ , где  $K$  – середина ребра  $AA_1$ , а  $M$  делит ребро  $BC$  в отношении 3 : 1.
2. Доказать, что векторы  $\mathbf{a}(4; -1; -5)$ ,  $\mathbf{b}(3; -4; -2)$ ,  $\mathbf{c}(0; 3; -2)$  образуют базис. Разложить вектор  $\mathbf{d}(-1; 7; -2)$  по этим векторам.
3. Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = -\mathbf{m} - \mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{\pi}{6}$ .
4. Найти  $\text{pr}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}$ , при  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$  и  $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ , где  $\mathbf{a}(4; -7; 9)$ ,  $\mathbf{b}(-2; 1; 4)$ ,  $\mathbf{c}(2; 2; -3)$ .
5. Найти координаты единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , перпендикулярного плоскости  $\triangle ABC$ , где  $A(2; 7; 7)$ ,  $B(1; 12; 6)$ ,  $C(3; 1; 7)$ .
6. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$  и  $\mathbf{b} = 4\mathbf{m} - \mathbf{n}$  при  $|\mathbf{m}| = 1$ ,  $|\mathbf{n}| = 5$ ,  $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \frac{5\pi}{6}$ .
7. Вычислить объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , площадь грани  $ABCD$  и высоту, опущенную на эту грань из вершины  $A_1$ .  $A(2; -4; -3)$ ,  $B(7; -7; 1)$ ,  $D(1; -3; -6)$ ,  $A_1(5; -5; -2)$ .
8. Задана пирамида  $SABC$  координатами вершин  $A(7; 6; 5)$ ,  $B(10; 7; 5)$ ,  $C(3; 8; 6)$ ,  $S(1; 6; 3)$ :  
а) составить уравнение плоскости  $ABC$ ,  
б) найти расстояние от вершины  $S$  до плоскости  $ABC$ .
9. Составить уравнение плоскости  $\pi$ , проходящей через точку  $M(3; -9; -6)$  перпендикулярно плоскостям  $x - 2y = 6$  и  $3x - 3y + z - 3 = 0$ .
10. Составить уравнение прямой  $AB$  и найти расстояние от точки  $C$  до этой прямой, если  $A(1; 3; 8)$ ,  $B(-2; 8; 0)$ ,  $C(2; 1; 11)$ .
11. Привести к каноническому виду общие уравнения прямой
$$\begin{cases} x + 4y + z - 28 = 0 \\ -x - 7y + 27 = 0 \end{cases}.$$
12. Найти координаты точки  $M_1$ , симметричной точке  $M(-6; -4; 1)$  относительно плоскости  $9x + 4y - 9z = 10$ .
13. Найти угол между прямой  $l : \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{-4}$  и плоскостью  $\pi : x + y + 2z = -3$ .